Kesirli Türevde Son Gelişmeler

Kübra DEĞERLİ
Yrd.Doç.Dr. Işım Genç DEMİRİZ

Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

6-9 Eylül, 2017

- Kesirli Türevin Ortaya Çıkışı
- Gama ve Beta Fonksiyonları
- Bazı Kesirli Türev Tanımları
- Uygulamalar

Kesirli Türevin Ortaya Çıkışı

Türev, bir fonksiyonda bağımlı bir değişkenin(y) bağımsız bir değişkene(x) göre ani (bir andaki) değişme nispetidir. Türev hesap metodu, 1666 yılında Newton tarafından geliştirilmiştir. L'Hospital ise Newton'un çalışmalarını değişim aritmetiği olarak genellemiştir. Newton ile eş zamanlarda Leibniz de bu konu ile ilgilenmiştir. Leibniz, aynı zamanda diferansiyel aritmetik ve sonsuz aritmetik konularıyla da ilgilenmiş ve geliştirmiştir.
Türev hesabı için kullanılan $(d^n y)/(dx^n)$ifadesi ilk kez Leibniz tarafından kullanılmıştır. Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü gibi tam sayı mertebeden türevlerinin nasıl alındığı bilinmektedir. Acaba aynı fonksiyonun 1/2 inci, 3/2 inci gibi kesir mertebeden türevi almak mümkün müdür?

İlk olarak 1695' de Leibniz'in L'Hospital'a "Tam sayı mertebeden türevler, kesir mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" şeklindeki sorusu kesirli türev kavramının ortaya çıkmasına ve birçok ünlü matematikçinin ilgisini çekmesine neden olmuştur. O tarihten bu yana birçok ünlü teorik ve uygulamalı matematikçi kesirli türev hesabıyla ilgilenmiş ve kesirli türev hesabını geliştirmiştir. Riemann, Grünwald-Letnikov, Liouville, Caputo, Euler, Abel,Fourier,Kobel,Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace kesirli türeve katkı sağlayan başlıca matematikçilerdir.Kesirli türev; elektrokimya, biyoloji, biyomühendislik, biyofizik, fizik, mekanik-mekatronik gibi mühendisliğin ve matematiğin bir çok alanında uygulanmaktadır.

$y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alırsak,f(t) fonksiyonunun klasik türev tanımıyla ardışık türevleri,

$$f^{'}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

$$f^{''}(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'^{(t)} - f^{'}(t-h)}{h}$$

$$f^{''}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right)$$

$$f^{''}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}$$

$$f^{'''}(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

Tümevarım ile,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh)$$

elde edilir.Genel olarak kesirli türevle uğraşan matematikçiler,türevin klasik tanımından yola çıkarak,ardışık türevleri incelemiş ve geliştirmişlerdir.Kesirli türev hesabında gama ve beta fonksiyonları sıklıkla kullanılmaktadır.Bu nedenle,kesirli türevin bazı tanımları verilmeden önce, gama ve beta fonksiyonlarının tanımları verilecektir.

Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu, n in pozitif değerleri için Euler integrali dediğimiz

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

ile tanımlanır. Bu belirli integral, n nin pozitif değerleri için yakınsar; dolayısıyla n nin bir fonksiyonudur.
n=1 için;

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x}\, dx$$

elde edilir.

n yerine n+1 alınırsa,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

$\int udv = vdu - \int vdu$ Kısmi integrasyonu kullanılırsa,
$u = x^n$, $du = nx^{n-1}dx$ ve $dv = e^{-x}dx$,$v = -e^{-x}$ ve bu dönüşümler yerlerine yazılırsa,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \, = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

olur.

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$$

Buradan,

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

elde edilir.

n=1 için,
$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$
n=2 için,
$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1$
n=3 için,
$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2.1$
Bu şekilde devam edilirse,
n=n için,
$\Gamma(n+1) = n!$ elde edilir.
Bu eşitlikte, n=0 yazılarak, $0! = \Gamma(1) = 1$ bulunur.
Kesirli türev hesabında, pratik olarak,

$$\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

alınacaktır.

Beta Fonksiyonu

$m > 0, n > 0$ olmak üzere, beta fonksiyonu

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralde, x=1-y alınırsa, dx=-dy olur. Bu dönüşüm, integralde yerleştirilirse,

$$\beta(m,n) = -\int_0^1 (1-y)^{m-1}(y)^{n-1}dy = -\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy$$

elde edilir.
Burada, $\beta(m,n)$ nin $\beta(n,m)$ ile eşit olduğu görülür.
Yani; β fonksiyonunda m yerine n, n yerine m gelebilir.

$$x = \sin^2\theta$$

$$dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

değişken dönüşümü yapılırsa, beta fonksiyonu,

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2m-1}\cos\theta^{2n-1} d\theta$$

şeklinde elde edilir.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

fonksiyonunda $x = y^2$ alınırsa,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{2n-2}e^{-y^2}2y\,dy\; = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy$$

elde edilir. Benzer şekilde, şu ifadeyi de yazabiliriz.

$$\Gamma(m) = 2\int_0^{\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}\,dy$$

Bu iki ifadeyi taraf tarafa çarpalım.

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$x = cos\theta, y = sin\theta, dxdy = rdrd\theta$$

yazılarak, kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$x^2 + y^2 = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = r^2$$

ve $\frac{y}{x} = tan\theta$ dan $y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ olur.

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta^{2m-1}sin\theta^{2n-1}d\theta \int_0^\infty r^{2(m+n-1)}e^{-r^2}\,dr$$

şeklinde elde edilir.Burada, m ile n yer değiştirebilir.

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \beta(m,n).2\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)} e^{-r^2}\, dr$$

elde edilir. Bu ifadede,

$$2\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)} e^{-r^2}\, dr \, = \Gamma(m+n)$$

olduğu görülür.
Bu durumda, beta fonksiyonu ile gama fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

şeklinde elde edilir.

Bazı Kesirli Türev Tanımları
1)Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

m,$m < p < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^k(t)$,(k=1,2,3,. . . ,m+1) türevleri ile [a,t] kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde, f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau$$

şeklindedir.(Özen ve Öztürk 2004)

2)Riemann-Liouville Kesirli Türevi

f fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun.m doğal sayılar kümesinin elemanı ve $m-1 < p < m$ olmak üzere, $t > a$ için reel bir fonksiyonunun p.mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi,

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır.(Özen ve Öztürk 2004)

3)Caputo Kesirli Türevi

m, $m-1 < p < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, p herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde, f fonksiyonunun p.mertebeden Caputo kesirli türevi

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}}$$

şeklinde tanımlanır.(Özen ve Öztürk 2004)

4)Euler Kesirli Türev Tanımı

Euler, 1738'de polinomik fonksiyonların kesirli türevini ,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)...(m-n+1)x^{(m-n)}$$

formülünü kullanarak,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{(m-n)}$$

şeklinde tanımlamıştır.

5)Ali Karcı'nın Kesirli Türev İçin Yeni Yaklaşımı

Türev kavramının klasik tanımı,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

şeklindedir.Burada, f(x+h),f(x),(x+h) ve x terimlerinin kuvvetleri "1" olarak verilmiştir.Bu durum Karcı tarafından farkedilmiştir. Karcı,2013'te yaptığı bir çalışmada kesirli türev için iki yöntem ortaya koymuştur. Birinci yöntem,

$$\lim_{h\to 0}(\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x})^a=((f^{'}(x))^a$$

şeklinde olur.Bu sonuç bilinen türevin "a" kuvvetidir.İkinci yöntem ise f(x+h),f(x),(x+h) ve x terimlerinin kuvvetlerinin ayrı-ayrı "a" olması durumudur.

Tanım 1:

$f(x) : \Re \mapsto \Re$ bir fonksiyon, $a \in \Re$ ve L(.) L'Hospital işlemini temsil etmek üzere, f(x) fonksiyonunun kesirli türevi,

$$f^a(x) = \lim_{h \to 0} L(\frac{f^a(x+h) - f^a(x)}{(x+h)^a - x^a})$$

$$f^a(x) = (\frac{f(x)}{x})^{a-1} f^{'}(x)$$

şeklinde tanımlanır. Kesir dereceli türev için verilen bu tanımda türev derecesi herhangi bir değer alabilir.Hatta türev derecesi "a" karmaşık sayı bile olabilir.Bu şekilde alınan bir türev işleminde operatör artık doğrusal değildir ve doğrusal olmayan bir operatör durumuna gelmektedir.

Aynı zamanda klasik türev işleminde kullanılan birinci türev,ikinci türev gibi ifadeler Ali Karcı'nın bu yaklaşımına göre kullanılmayacaktır.Çünkü;a=2 olması ikinci türev anlamına gelmemektedir. Örneğin;$f(x)=x^2$ olmak üzere, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=2$ dir fakat,

$$f^a=f^{(2)}=(\frac{f(x)}{x})^{2-1}2x=2x^2$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\neq f^{(2)}(x)$$

olacaktır.Bu yeni tanıma göre, kesirli türevlere grafikler üzerinden bakılabilir. Bir fonksiyonun türevi alınan fonksiyonun dönüm noktalarında maksimum/minimum noktalarına sahip olacaktır.

Ali Karcı bazı özel fonksiyonun kesirli türevlerini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir. $f(x) : \Re \mapsto \Re$,α, μ, η birer tam sayı ve $\alpha = \frac{\mu}{\eta}$ olmak üzere,bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a)$f(x) = x^n$ için,

$$f^{\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}x^{\frac{n(\mu-\eta)}{\eta}}}{x^{\frac{\mu-\eta}{\eta}}}$$

şeklindedir.

b)$f(x) = e^x$ için,

$$f^{\alpha}(x) = \frac{e^x e^{\frac{(\mu-\eta)x}{\eta}}}{x^{\frac{\mu-\eta}{\eta}}}$$

şeklindedir.

c)$f(x) = sinx$ için,

$$f^{\alpha}(x) = \frac{cosx(sinx)^{\frac{(\mu-\eta)}{\eta}}}{x^{\frac{\mu-\eta}{\mu}}}$$

şeklindedir.
d)$f(x) = lnx$ için,

$$f^{\alpha}(x) = \frac{1}{x}\frac{(lnx)^{\frac{(\mu-\eta)}{\eta}}}{x^{\frac{\mu-\eta}{\eta}}}$$

şeklindedir.

UYGULAMALAR

1)

$f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevini hesaplayalım.
Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau$$

şeklinde idi. Burada,$p = \frac{1}{2}$ alındığında, m=0 olur.

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{0}(a)(t-0)^{-\frac{1}{2}+0}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+0+1)} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{0-\frac{1}{2}} f^{(1)}(\tau)\, d\tau$$

elde edilir.Burada,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{0-\frac{1}{2}}.1.(\tau)\,d\tau$$

$(t-\tau)=u^2, -d\tau=2udu$ değişken dönüşümü yapılırsa,f(t) fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden kesirli türevi,

$$f^{\frac{1}{2}}(t)=\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

şeklinde elde edilir.

2)

$f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ mertebeden kesirli türevini Riemann-Liouville yöntemiyle hesaplayalım. Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklindeydi.Burada,m=1 ,$p = \frac{1}{2}$ ve özel olarak a=0 alınırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d^1}{dt^1} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$$

$t-\tau=u^2, -d\tau=2udu$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$D^{\frac{1}{2}}f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{0}\frac{-(t-u^2)^2 2udu}{(u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{0}-2(t-u^2)^2du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{0}(-2t^2+4tu^2-2u^4du)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[-2t^2\sqrt{t}-\frac{4}{3}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5})t^{\frac{5}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[\frac{16}{15}t^{\frac{5}{2}}]$$

$$D^{\frac{1}{2}}f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{5}{2}.\frac{16}{15}t^{\frac{3}{2}}=\frac{8t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$$

şeklinde bulunur.

3)

$f(t) = c$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden kesirli türevini Caputo yöntemiyle hesaplayalım. Caputo kesirli türevi ,

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}}$$

şeklindeydi.Burada,m=1, $p = \frac{1}{2}$ alındığında,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{0.d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

bulunur.Sabit bir fonksiyonda değişim olamayacağı için, sabit bir fonksiyonun kesirli türevi de normal türevde olduğu gibi "0" bulunmuştur.

4)

$f(t) = t^2 - 2t + 1$ fonksiyonunun $\frac{3}{2}$ inci türevini Euler yöntemiyle hesaplayalım. Euler kesirli türevi,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{(m-n)}$$

şeklindeydi.Burada,$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$,$n = \frac{3}{2}$ ve m=2 alınırsa,

$$D^{\frac{3}{2}}(t-1)^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{3}{2}+1)}(t-1)^{2-\frac{3}{2}}$$

$$D^{\frac{3}{2}}(t-1)^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})}(t-1)^{\frac{1}{2}}$$

$\Gamma(3) = (3-1)! = 2, \Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ alınırsa,

$$D^{\frac{3}{2}}(t-1)^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-1)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde elde edilir.

5)

f(t)=sint için çeşitli türevlerini Ali Karcı'nın yaklaşımıyla hesaplayalım. f(t)=sint için;

$$f^{(\alpha)} = \frac{cost.(sint)^{\frac{\mu-\eta}{\eta}}}{t^{\frac{\mu-\eta}{\mu}}}$$

şeklindeydi.Burada,$\alpha = \frac{\mu}{\eta}$ idi. $\alpha = \frac{1}{4}$ için; $\mu = 1$, $\eta = 4$ alınır.Bu durumda, $\mu - \eta = -3$ olur.

$$f^{(\frac{1}{4})}(t) = \frac{cost.(sint)^{\frac{-3}{4}}}{t^{-3}} = cost(sint)^{\frac{-3}{4}} t^3$$

bulunur.

Benzer şekilde,
$\alpha = \frac{2}{4}$ için;

$$f^{(\frac{2}{4})}(t) = cost.(sint)^{\frac{-2}{4}} t$$

$\alpha = \frac{3}{4}$ için;

$$f^{(\frac{3}{4})}(t) = cost.(sint)^{\frac{-1}{4}} t^{\frac{1}{3}}$$

$\alpha = \frac{4}{4}$ için;

$$f^{(\frac{4}{4})}(t) = cost.(sint)^{\frac{0}{4}} t^{\frac{0}{4}} = cost$$

elde edilir.
Sonuç olarak baktığımızda, $\frac{4}{4}$ üncü türev yani 1. türev,klasik sint fonksiyonunun 1.türevi olan cost ye eşit olarak bulunur.

Kaynaklar

Igor Podlubny
Fractional Differential Equations, Volume 198 1st Edition An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications