1. La Sonda Solar Parker es una misión de la NASA cuyo objetivo es acercarse a la corona del Sol. Suponga que la sonda detecta que en un punto determinado del espacio, la temperatura en la dirección $(1,1,1)$ disminuye a razón de dos unidades, en la dirección $(1,0,1)$ aumenta a razón de una unidad y en la dirección $(0,-1,1)$ disminuye en razón de una unidad. Si, además de esto, la sonda detecta que está en un lugar donde la temperatura puede afectar su funcionamiento y debe alejarse de tal manera que la temperatura disminuya a la mayor razón, ¿qué dirección debe seguir la sonda? (2.0pt)

Solución. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función que modela la temperatura y $a \in \mathbb{R}^3$ el punto donde se encuentra la sonda. Se conoce que

$$f'(a;(1,1,1)) = -2, \qquad f'(a;(1,0,1)) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'(a;(0,-1,1)) = -1.$$

Se busca la dirección de máximo decrecimiento de la función, la cual es contraria al gradiente, por lo tanto, debemos calcular $\nabla f(a)$. Sabemos que

$$f'(a;(1,1,1)) = \nabla f(a)\cdot(1,1,1), \qquad f'(a;(1,0,1)) = \nabla f(a)\cdot(1,0,1)$$

t

$$f'(a;(0,-1,1)) = \nabla f(a)\cdot(0,-1,1),$$

por lo tanto

$$\nabla f(a)\cdot(1,1,1) = -2, \qquad \nabla f(a)\cdot(1,0,1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \nabla f(a)\cdot(0,-1,1) = -1$$

Si tomamos $\nabla f(a) = (u,v,w)$, tenemos que

$$-2 = \nabla f(a)\cdot(1,1,1) = (u,v,w)\cdot(1,1,1) = u+v+w,$$
$$1 = \nabla f(a)\cdot(1,0,1) = (u,v,w)\cdot(1,1,1) = u+w$$

y

$$-1 = \nabla f(a)\cdot(0,-1,1) = (u,v,w)\cdot(-1,1) = -v+w,$$

por lo tanto

$$u = 5 \qquad v = -3 \qquad \text{y} \qquad w = -4.$$

Con esto, se tiene que

$$\nabla f(a) = (5,-3,-4),$$

por lo tanto, la dirección que debe seguir la sonda es $(-5,3,4)$. □

2. *a*) Utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo calcular $\displaystyle\int_0^2 x\cos(\pi x^2)\,dx$. (1.0pt)

   b) Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo determinar la derivada de la función definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$, para $x > 0$. (1.0pt)

Solución.

a) Tomemos el cambio de variable

$$u = \pi x^2 \qquad du = 2\pi x\,dx$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
2	4π

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\cos(\pi x^2)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\cos(u)\,du\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{sen}(u)\right)\Big|_0^{4\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{sen}(4\pi)-\operatorname{sen}(0)\right)=0.\end{aligned}$$

b) Dado que la función definida por

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

es continua entre 1 y x^2 y la función $x \to x^2$ es derivable, se tiene que

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\right)=\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}(x^2)'=\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}(2x)=\frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x}.$$ □

3. La derivada de la función definida por $f(x)=x^2$ es

   a) $f'(x)=x^2$

   b) $f'(x)=x$

   c) $f'(x)=2x$

   d) $f'(x)=2x^2$

Solución. La opción correcta es la *c)*. □

4. La derivada de la función definida por $f(x)=x^2$ es

   a) $f'(x)=x^2$ *b)* $f'(x)=x$ *c)* $f'(x)=2x$ *d)* $f'(x)=2x^2$

Solución. La opción correcta es la *c)*. □
